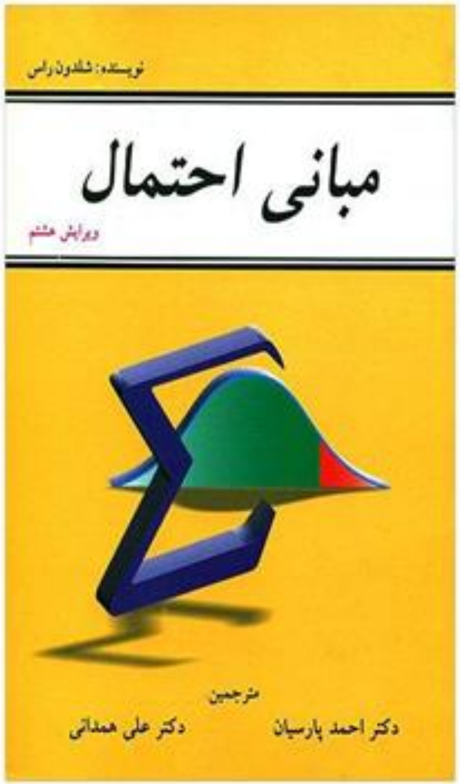
احتمال مهندسی
فصل اول: اصول شمارش

سید مهدی سجادیه

فهرست مطالب



- مرجع
- مبانی احتمال

احتمال = عقل سلیم

- ضرورت درس احتمال
- مباحثی که علم به آن مساله ممکن نیست
- مباحثی که محاسبه ممکن نیست (به صرفه نیست)

مباحث درس

- آنالیز ترکیبیاتی
- مبانی احتمال
- احتمال شرطی و استقلال

- متغیر تصادفی
- متغیر تصادفی پیوسته
- متغیرهای تصادفی توأم
- خواص امید ریاضی
- قضایای حدی

ارزشیابی

- میانترم ۶ نمره
- پایانترم ۱۱ نمره
- حضور در کلاس و حل تکالیف ۴ نمره

آزمایش تصادفی

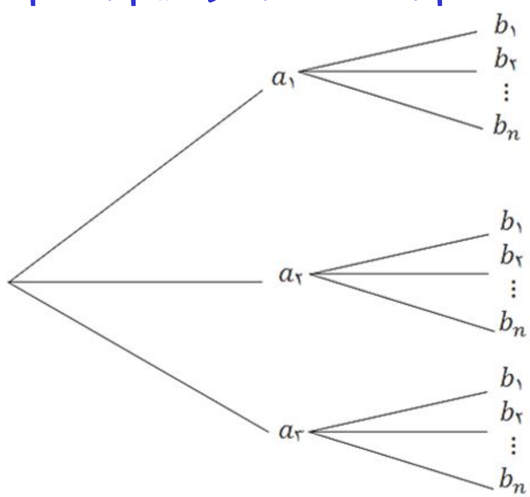
- آزمایش تصادفی :
  آزمایشی که نتیجه آن از قبل به طور قطعی معلوم نباشد
  مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، پیش بینی نتیجه فوتبال
- فضای نمونه:
  - تمام حالتهای ممکن برای یک ازمایش تصادفی (قرارداد با S نشان می دهیم)
- تعریف احتمال پیشامد
  - نسبت تعداد دفعات رخ دادن پیشامد A در n آزمایش وقتی که n به سمت بینهایت میل می کند.

$$\Pr(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

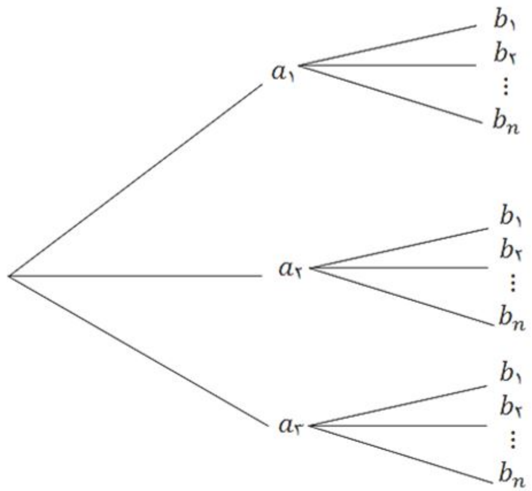
- شمارش یکی از نکات مهم در محاسبه احتمال

اصل شمارش

- اصل وَ:
  - اگر دو عمل که اولی به m حالت و دومی به n حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m*n$ حالت قابل انجام است.

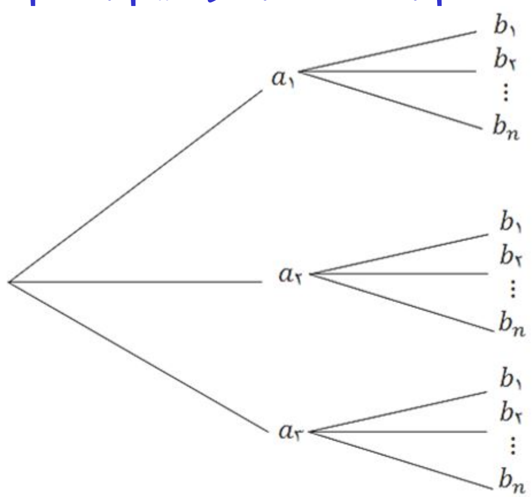


- اصل وَ:
  - اگر دو عمل که اولی به m حالت و دومی به n حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به m*n حالت قابل انجام است.



- مثال: جامعه ای شامل ۱۰ خانواده است که هر خانواده دو فرزند دارد.
- الف) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یکی از فرزندانش را انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟
- ب) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یک کودک انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟

- اصل **وَ**:
  - اگر دو عمل که اولی به m حالت و دومی به n حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به m*n حالت قابل انجام است.



- **مثال**: جامعه ای شامل ۱۰ خانواده است که هر خانواده دو فرزند دارد.
- الف) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یکی از فرزندانش را انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟ ۱۰*۲=۲۰

- ب) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یک کودک انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟
- ۱۰*۲۰=۲۰۰

اصل جمع

- اصل یا:
  - اگر عملی را بتوانبم به دو روش اجرا کنیم به طوریکه که روش اولی به m حالت و روش دوم به n حالت قابل انجام باشند این عمل به m+n حالت قابل انجام است.

اصل جمع

- اصل **یا**:
  - اگر عملی را بتوانیم به دو روش اجرا کنیم به طوریکه که روش اولی به m حالت و روش دوم به n حالت قابل انجام باشند این عمل به m+n حالت قابل انجام است.

- **مثال**: فرض کنید می خواهید یک ماشین تهیه کنید. در صورتیکه دو نمایشگاه وجود داشته باشد و در نمایشگاه اول ۴ ماشین و در نمایشگاه دوم ۳ ماشین وجود داشته باشد
- الف) به چند طریق از این دو نمایشگاه می توانید یک ماشین تهیه کنید؟

- ب) اگر بخواهیم از نمایشگاه اول یک ماشین و از نمایشگاه دوم نیز یک ماشین تهیه کنیم چند حالت وجود دارد؟

اصل جمع

- اصل **یا**:
  - اگر عملی را بتوانیم به دو روش اجرا کنیم به طوریکه که روش اولی به m حالت و روش دوم به n حالت قابل انجام باشند این عمل به m+n حالت قابل انجام است.

- **مثال**: فرض کنید می خواهید یک ماشین تهیه کنید. در صورتیکه دو نمایشگاه وجود داشته باشد و در نمایشگاه اول ۴ ماشین و در نمایشگاه دوم ۳ ماشین وجود داشته باشد
- الف) به چند طریق از این دو نمایشگاه می توانید یک ماشین تهیه کنید؟

۷=۴+۳

- ب) اگر بخواهیم از نمایشگاه اول یک ماشین و از نمایشگاه دوم نیز یک ماشین تهیه کنیم چند حالت وجود دارد؟

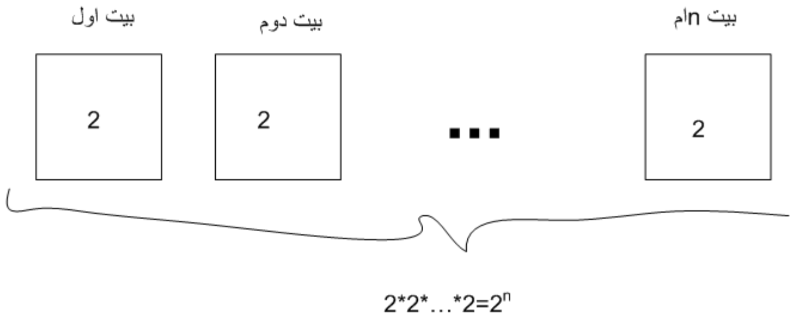
۱۲=۴*۳

تعمیم اصل شمارش

- **تعمیم اصل وَ:**
  - اگر k عمل که اولی به m_1 حالت، دومی به m_2 حالت، ... و kامی به m_k حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m_1 * m_2 * \ldots * m_k$ حالت قابل انجام است.

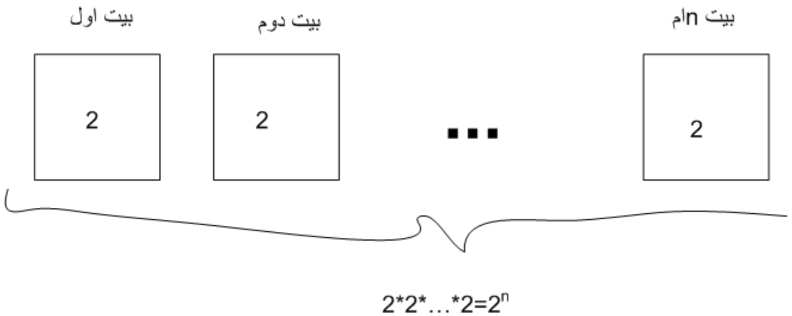
تعمیم اصل شمارش

- تعمیم اصل وَ:
  - اگر k عمل که اولی به m_1 حالت، دومی به m_2 حالت، ... و kامی به m_k حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m_1*m_2*...*m_k$ حالت قابل انجام است.
- مثال: چند عدد **n** رقمی می توان نوشت که ارقام آن فقط صفر یا یک باشد(اگر سمت راست یک **n** بیتی صفر باشد آن صفرها حذف نمی شود)؟

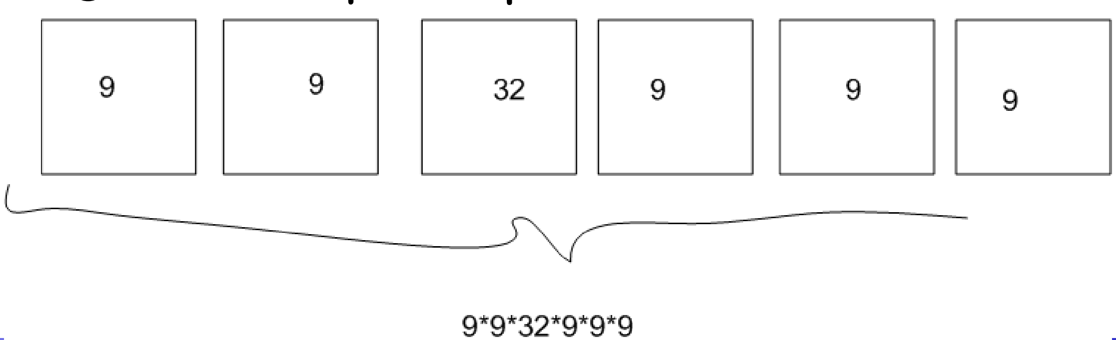


تعمیم اصل شمارش

- تعمیم اصل وَ:
  - اگر k عمل که اولی به m_1 حالت، دومی به m_2 حالت، ... و kامی به m_k حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m_1*m_2*\ldots*m_k$ حالت قابل انجام است.
- **مثال**: چند عدد **n** رقمی می توان نوشت که ارقام آن فقط صفر یا یک باشد(اگر سمت راست یک **n** بیتی صفر باشد آن صفرها حذف نمی شود)؟



- **مثال**: چند پلاک اتومبیل با یک حرف الفبا و ۵ رقم با ارقام غیر صفر می توان نوشت؟



مثال

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، داده شده اند.

الف) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌می‌توان ساخت به شرطی که اعداد حاصل دارای ارقام تکراری نباشند.

ب) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌می‌توان ساخت هرگاه تکرار ارقام مجاز باشد.

پ) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌فرد می‌توان ساخت که دارای ارقام تکراری نباشند.

مثال

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، داده شده اند.

الف) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌می‌توان ساخت به شرطی که اعداد حاصل دارای ارقام تکراری نباشند.

ب) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌می‌توان ساخت هرگاه تکرار ارقام مجاز باشد.

پ) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌فرد می‌توان ساخت که دارای ارقام تکراری نباشند.

$$\underbrace{\boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}}_{7*6*5=210} \qquad \underbrace{\boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{7}}_{7*7*7=343}$$

مثال

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، داده شده اند.

الف) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌می‌توان ساخت به شرطی که اعداد حاصل دارای ارقام تکراری نباشند.

ب) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌می‌توان ساخت هرگاه تکرار ارقام مجاز باشد.

پ) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی‌فرد می‌توان ساخت که دارای ارقام تکراری نباشند.

$$\underbrace{\boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{7}}_{7*7*7=343}$$

$$\underbrace{\boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}}_{7*6*5=210}$$

$$\underbrace{\boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{4}}_{5*6*4=120}$$

- ۴ رقم فرد در رقم آخر (۱، ۳، ۵ و ۷)
- یک رقم حذف می شود برای رقم دوم عدد سه رقمی
- دو رقم برای رقم سوم حذف می شود

جایگشت

- اگر r عضو وجود داشته باشد (عضو مجزا) و ترتیب قرار گرفتن آنه برای ما مهم باشد گوییم جایگشت rتایی داریم.
- تعداد جایشگت‌های rتایی برابر است با:
- $r!=r*(r-1)*(r-2)*\ldots*2*1$

جایگشت

- اگر r عضو وجود داشته باشد (عضو مجزا) و ترتیب قرار گرفتن آنه برای ما مهم باشد گوییم جایگشت rتایی داریم.
- تعداد جایشگت‌های rتایی برابر است با:
- $r!=r*(r-1)*(r-2)*\ldots*2*1$

- مثال: فرض کنید در یک کلاس ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر حضور دارند. پس از برگزاری امتحان نمرات آنه به چند صورت قابل نمایش است اگر
- الف) محدودیتی در لیست نباشد؟
- ب) لیست دخترها و پسرها جدا باشد؟

جایگشت

- اگر r عضو وجود داشته باشد (عضو مجزا) و ترتیب قرار گرفتن آنه برای ما مهم باشد گوییم جایگشت rتایی داریم.
- تعداد جایشگت‌های rتایی برابر است با:
- $r!=r*(r-1)*(r-2)*\ldots*2*1$

- **مثال**: فرض کنید در یک کلاس ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر حضور دارند. پس از برگزاری امتحان نمرات آنها به چند صورت قابل نمایش است اگر
- الف) محدودیتی در لیست نباشد؟

10!

- ب) لیست دخترها و پسرها جدا باشد؟
- **6!*4!**

مثال

- شخصی ۱۰ کتاب دارد که ۴ تای آنها ریاضی، ۳تای آن برق، ۲ تای آن فیزیک و یکی از آنها زبان است. وی می خواهد کتابها را در یک قفسه بچیند. به چند طریق می تواند کتابها را در یک قفسه بچیند به طوریکه
- الف) هیچ محدودیتی نداشته باشد.
- ب) بخواهد کتابهای با موضوع یکسان در کنار هم باشند.

مثال

- شخصی ۱۰ کتاب دارد که ۴ تای آنها ریاضی، ۳تای آن برق، ۲ تای آن فیزیک و یکی از آنها زبان است. وی می خواهد کتابها را در یک قفسه بچیند. به چند طریق می تواند کتابها را در یک قفسه بچیند به طوریکه
- الف) هیچ محدودیتی نداشته باشد.
- **10!**
- ب) بخواهد کتابهای با موضوع یکسان در کنار هم باشند.
- حل: جابه جایی کتابهای ریاضی !4
- جابه جایی کتابهای برق !3
- جابه جایی کتابهای فیزیک !2
- جابه جایی کتابهای زبان !1

مثال

- شخصی ۱۰ کتاب دارد که ۴ تای آنها ریاضی، ۳تای آن برق، ۲ تای آن فیزیک و یکی از آنها زبان است. وی می خواهد کتابها را در یک قفسه بچیند. به چند طریق می تواند کتابها را در یک قفسه بچیند به طوریکه
- الف) هیچ محدودیتی نداشته باشد.
- **10!**
- ب) بخواهد کتابهای با موضوع یکسان در کنار هم باشند.
- حل: جابه جایی کتابهای ریاضی !4
- جابه جایی کتابهای برق !3
- جابه جایی کتابهای فیزیک !2
- جابه جایی کتابهای زبان !1
- جابه جایی نوع کتابها !4 (۴ نوع کتاب)

$$4!*(4!*3!*2!*1!)$$

ترتیب

- فرض کنید n عضو داریم و می خواهیم k تا از آنها را انتخاب کنیم (k<=n) به طوریکه ترتیب اعضا برای ما مهم باشد. به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

ترتیب

- فرض کنید **n** عضو داریم و می خواهیم **k** تا از آنها را انتخاب کنیم (**k<=n**) به طوریکه ترتیب اعضا برای ما مهم باشد. به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

- مثال: فرض کنید چهار عضو **a,b,c,d** وجود دارند. چند ترتیب برای انتخاب دو عضو از این مجموعه وجود دارد.

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

ترتیب

- فرض کنید **n** عضو داریم و می خواهیم **k** تا از آنها را انتخاب کنیم (**k<=n**) به طوریکه ترتیب اعضا برای ما مهم باشد. به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

- **مثال**: فرض کنید چهار عضو **a,b,c,d** وجود دارند. چند ترتیب برای انتخاب دو عضو از این مجموعه وجود دارد.

ab ac ad ba bc bd

ca cb cd da db dc

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

جایگشت با ویژگی های خاص

- **مثال**: با حروف کلمه ABC چند کلمه سه حرفی می توان بدون تکرار می توان نوشت(بدون توجه به معنی)؟
- حل
- $3!=6$
- ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA

- **مثال**: با حروف کلمه ABB چند کلمه سه حرفی می توان بدون تکرار می توان نوشت(بدون توجه به معنی)؟
- حل : (جایگزینی C با B)
- ABB,ABB,BAB,BBA,BAB,BBA
- ۳ تا

جایگشت با ویژگی های خاص

- اگر یک مجموعه n تایی داشته باشیم که k1 عضو آن یک شکل، k2 عضو آن شکل دیگر و ... kr تای آن شکل مجزا از r-1 شکل قبل باشند در این صورت تعداد جایگشتها برابر است با:

$$\frac{n!}{(k_1!)(k_2!)\ldots(k_r!)}$$

جایگشت با ویژگی های خاص

- اگر یک مجموعه n تایی داشته باشیم که k1 عضو آن یک شکل، k2 عضو آن شکل دیگر و ... kr تای آن شکل مجزا از r-1 شکل قبل باشند در این صورت تعداد جایگشتها برابر است با:

$$\frac{n!}{(k_1!)(k_2!)\dots(k_r!)}$$

- **مثال**: با حروف کلمه PERRER چند کلمه دیگر شش حرفی می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{(3!)(2!)(1!)} = 60$$

- **مثال**: با حروف کلمه مامان چند کلمه ۵ حرفی غیر تکراری می توان ساخت؟

$$\frac{5!}{(2!)(2!)(1!)} = 15$$

جایگشت با ویژگی های خاص

- **مثال: در یک مسابقه شطرنج، از ۱۰ بازیکن شرکت کننده، ۴ بازیکن شرکت کننده، ۴ نفر آمریکایی، ۳ نفر روس، ۲ نفر انگلیسی و یک نفر ایرانی هستند. اگر نتایج بر اساس ملیت اعلام شود به چند طریق این نتایج می تواند اعلام شود؟**

جایگشت با ویژگی های خاص

- **مثال:** در یک مسابقه شطرنج، از ۱۰ بازیکن شرکت کننده، ۴ بازیکن شرکت کننده، ۴ نفر آمریکایی، ۳ نفر روس، ۲ نفر انگلیسی و یک نفر ایرانی هستند. اگر نتایج بر اساس ملیت اعلام شود به چند طریق این نتایج می تواند اعلام شود؟
- **حل:** دقت کنید که در این مساله افرادی که ملیت یکسان دارند مانند هم هستند (مانند مساله کتابها مجزا نیستند) اگر فرض کنیم آمریکایی با **U**، روسیه با **R**، انگلیسی با **E** و ایرانی با **I** نشان داده شوند باید گفته شود کلمه **UUUURRREEI** به چند طریق قابل نمایش است که برابر است با:

$$\frac{10!}{(4!)(3!)(2!)(1!)}$$

- اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب اشیا مهم نباشد گوییم ترکیب رخ داده است:

$$\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب اشیا مهم نباشد گوییم ترکیب رخ داده است:

$$\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- چندویژگی مهم

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r}=0, r>n$$

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.
- الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.
- ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دونفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟
-

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.
- الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(7)!5!} = \frac{12*11*10*9*8}{5*4*3*2*1}$$

- ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دونفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟
-

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.
- الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(7)!5!} = \frac{12*11*10*9*8}{5*4*3*2*1}$$

- ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دونفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟
-

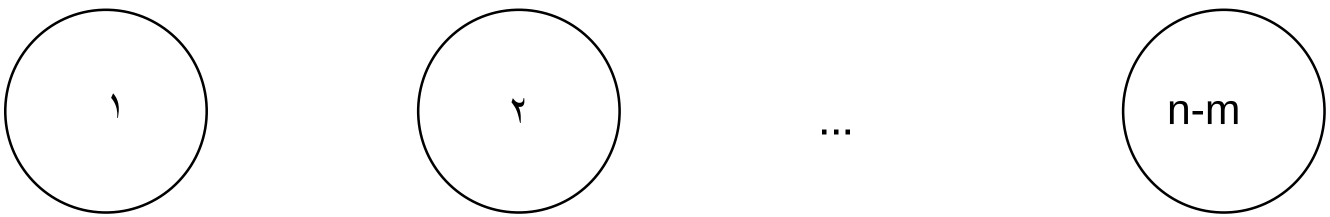
$$\binom{5}{3}*\binom{7}{2} = \frac{5!}{(3)!2!}*\frac{7!}{(5)!2!} = 10*21 = 210$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n انتن وجود دارد که mتای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل:

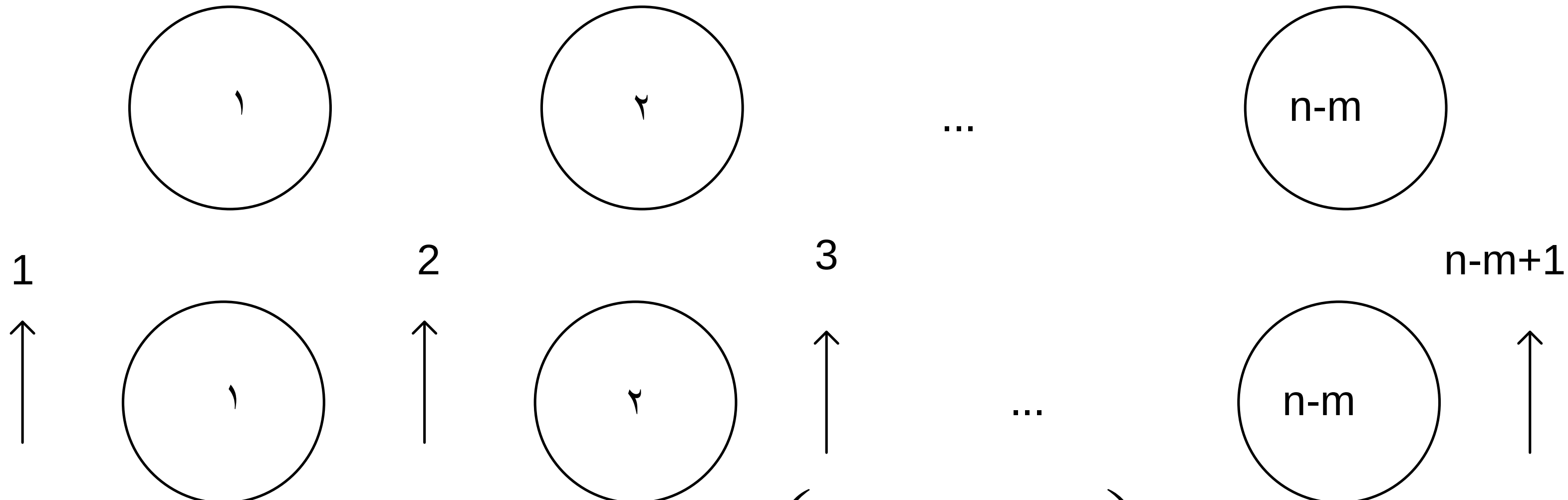
مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n انتن وجود دارد که mتای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل: آنتن های سالم را در نظر بگیرید



مثال

- فرض کنید مجموعه ای از **n** انتن وجود دارد که **m**تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان **n** آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل:



$$\binom{n-m+1}{m}$$

مثال

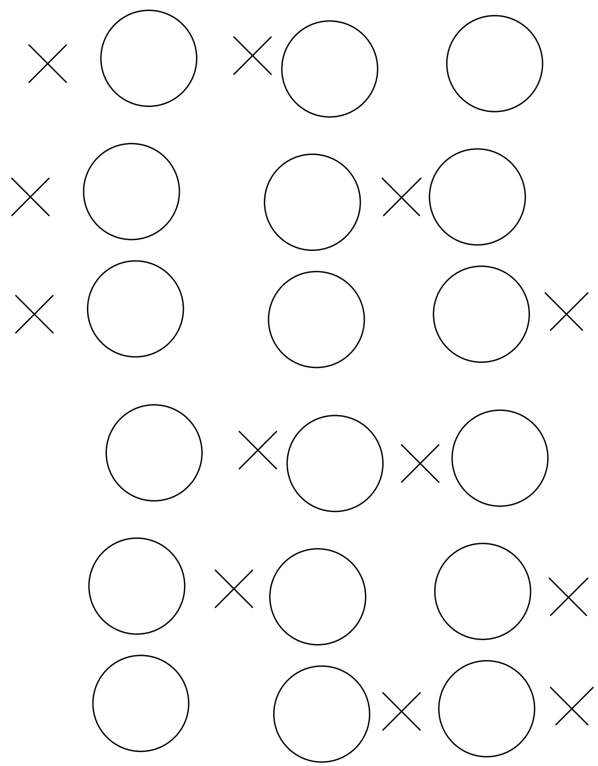
- فرض کنید مجموعه ای از 5 انتن وجود دارد که 2تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان 5 آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟
- حل

$$\binom{5-2+1}{2}=6$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از 5 انتن وجود دارد که 2تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان 5 آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟
- حل

$$\binom{5-2+1}{2}=6$$



رابطه مهم در ترکیبیات

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

رابطه مهم در ترکیبات

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

- اثبات: با استفاده از یک عنصر (تبدیل **n** عنصر به دو مجموعه یک عضو و **n-1** عضو)

$$\binom{n-1}{r-1}$$

- دو حالت
- حضور یک عضو مورد نظر در **r** تایی انتخاب شده

$$\binom{n-1}{r}$$

- عدم حضور یک عضو مورد نظر در **r** تایی انتخاب شده

قضیه دو جمله ای

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) =$$
$$x^3 + x^2y + xyx + xy^2 + yxx + yxy + yyx + yyy =$$
$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

قضیه دو جمله ای

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

- اثبات:
- توان **i** متغیر **x** باید از **n** پرانتز ، **i** تای آن انتخاب شود $\binom{n}{i}$

تقسیم n نفر به r گروه مجزا

- فرض کنید n نفر را بخواهیم بین r گروه تقسیم کنیم به طوریکه اعضای هر گروه به ترتیب گروههای n_1،n_2 و ... و n_r باشددر این صورت تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1}}{n_r}=$$

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\,\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1}-n_r)!}=$$

$$\frac{n!}{n_1!(n_2)!\ldots n_r!}$$

مثال

- فرض کنید ۱۰ پلیس در یک کلانتری استخدام شده اند. اگر ۳ نفر در قسمت اداری، ۵ نفر در قسمت گشت و ۲ نفر در قسمت ورودی کار کنند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

مثال

- فرض کنید ۱۰ پلیس در یک کلانتری استخدام شده اند. اگر ۳ نفر در قسمت اداری، ۵ نفر در قسمت گشت و ۲ نفر در قسمت ورودی کار کنند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \binom{10}{2,5,3} = \frac{10!}{2!\ 5!\ 3!}$$

سپاس